„Meinen oder Wissen“

Die Geburtsstunde des Beweisens

1. Akt: Ägypten anno 2300 v.Chr. „Die Seilspanner in Ägypten“

Die sogenannten Seilspanner (= Harpedonapten) knüpften in Ägypten 13 Knoten in gleichen Abständen in ein Seil, so dass 12 gleich lange Seilstrecken entstanden. Sie benutzten es zum rechte Winkel erzeugen beim Felder einteilen, Pyramiden bauen, …
→ Auftritt
(KoP und zwei Hilfsarbeiter aus der Klasse, die ein ägyptisches „Gewand“ erhalten) mit einem 12m langen Seil. Es wird ein rechtwinkliges Dreieck abgespannt.
Wieso funktioniert das? → Abgang.

2. Akt: Griechische Antike: ca. 800 – 150 v.Chr. „Eintritt nur für die der Geometrie mächtigen“

KoP kommt ins Klassenzimmer und hat „Die Elemente“ dabei.
→ „Ich habe ein tolles Buch, welches ich euch zeigen möchte“

Euklids Elemente oder **Die Elemente** (im Original **Στοιχεῖα** *Stoicheia*) ist eine Abhandlung des griechischen Mathematikers Euklid (ca. 360 v. Chr. bis ca. 280 v. Chr.), in der er die Arithmetik und Geometrie seiner Zeit zusammenfasst und systematisiert. Das Werk zeigt erstmals musterhaft den Aufbau einer exakten Wissenschaft, da die meisten Aussagen aus einem begrenzten Vorrat von Definitionen, Postulaten und Axiomen hergeleitet und bewiesen werden. Dieses Vorgehen beeinflusste bis heute nicht nur die Mathematiker, sondern auch viele Physiker, Philosophen und Theologen bei ihrem Versuch, ihre Wissenschaft auf Axiomen aufzubauen.

Die Elemente wurden 2000 Jahre lang als akademisches Lehrbuch benutzt und waren bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts das nach der Bibel meist verbreitete Werk der Weltliteratur.

Das für die griechische Antike so typische nachdrückliche Insistieren auf dem Unterschied zwischen **Wissen** und bloßem **Meinen** wird erst dann richtig verständlich, wenn man die damals neuen Erfahrungen aus dem Bereich der beweisenden Mathematik bedenkt. Die Protagonisten des griechischen Aufklärungsprozesses verfügen über die (zu recht) immer wieder bewunderte innere Freiheit, sich von allerlei Ballast und Unsinn aus ihrer kulturellen Tradition zu befreien. Dies erscheint in einem ganz anderen Licht, wenn man bedenkt, dass das Vertrauen in die Verlässlichkeit des eigenen Urteils durch die Erfahrung der beweisenden Mathematik einen riesigen Auftrieb erhalten hat. Wenn man mit dem eigenen Verstande Dinge beweisen kann, an denen selbst ein Gott nicht mehr rütteln kann, was sollen einen da Jahrhunderte kultureller Tradition beeindrucken können?

„Eine Summe gerader Zahlen ist gerade“. Warum ist das so?

Meinen wir das oder wissen wir das?

Griechenland ca. 300 v. Chr.: Beweisen versus Vorrechnen

Euklid formuliert und beweist im Buch IX seiner Elemente die Sätze 21-34 und 36.

Sie lauten in abgekürzter Formulierung:

21. Eine Summe gerader Zahlen ist gerade.

22. Eine Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen ist gerade.

23. Eine Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ist ungerade.

24 Gerade minus gerade ergibt gerade.

25. Gerade minus ungerade ergibt ungerade.

26. Ungerade minus ungerade ergibt gerade.

27. Ungerade minus gerade ergibt ungerade.

28. Ungerade mal gerade ergibt gerade.

29. Ungerade mal ungerade ergibt ungerade.

30. Eine ungerade Zahl, die eine gerade Zahl teilt, teilt auch die Hälfte dieser Zahl.

31. Wenn eine ungerade Zahl mit einer Zahl teilerfremd ist, so auch mit dem Doppelten dieser Zahl.

32. Eine Zahl, die durch (wiederholte) Verdoppelung von 2 entsteht, ist ausschliesslich gerade mal gerade.

33. Eine Zahl, deren Hälfte ungerade ist, ist ausschliesslich gerade mal ungerade.

34. Jede gerade Zahl, die nicht zu den unter 32 und 33 genannten gehört, ist sowohl gerade mal gerade als auch gerade mal ungerade.

36. Die Theorie gipfelt in Satz 36, der besagt, dass die Zahlen von der Form

    $2^{n-1}(2^n - 1)$ vollkommen sind, wenn $(2^n - 1)$ prim ist. (Das sind sogenannte Mersennpriemzahlen) (Zur Erinnerung: Eine Zahl ist vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer Teiler ist.)

Pythagoräer beweisen mit Hilfe des Punktrasters zahlentheoretische Sachverhalte:

a) Dreieckszahlen → Summenformel (Tipp: $1 + 2 + 3 + 4 +\ldots = ?$)
b) Quadratzahlen → Summenformel (Tipp: $1 + 3 + 5 + 7 +\ldots = ?$)

Ein BEWEISSCHEMA

Die Pythagoräer (Griechenland ca. 500 v Chr.) begannen also einen mathematischen Sachverhalt (einen Satz) zu beweisen. Sie benutzten das Schema:

VORAUSSETZUNG **ANNAHME** **BEWEIS**

"Seit der Zeit der Griechen bedeutet "Mathematik" zu sagen, "Beweis" zu sagen."
(N. Bourbaki)

Euripides zum König, der einen Beweis lernen wollte und fragte, ob es keine kürzere Erklärung gebe: *"Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.* (Euripides)

3. Akt: „Selbst Beweise finden“

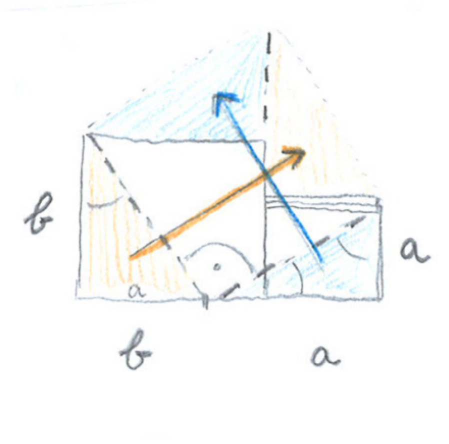
Werkstatt: 11 Stationen zur Beweisvielfalt der Satzgruppe von Pythagoras

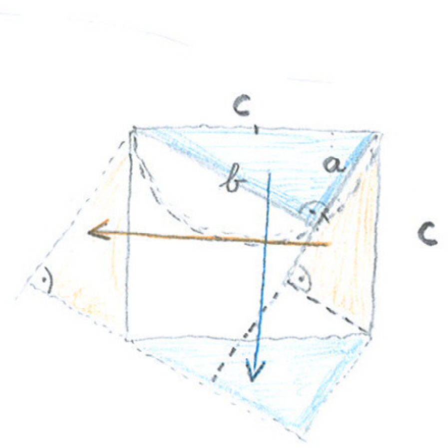
a. Satz von Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz, Ähnlichkeit
b. Hausaufgabe: Einen Beweis jemandem erklären → Ausstellung der Protokolle
c. Flächenverwandlungen, Wurzelkonstruktionen

d. Zusatz für Interessierte: $f(x) = \frac{1}{x}$ und $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$ konstruieren.

4. Akt: „Ein Gruppenpuzzle“

Quadrate vereinen – Quadrate entzweien
(vgl. Lehrstück „Pythagoras“ von Hans Brüngger)





Finale:

Eine Zeittafel von Babyloniern (1800 v.Chr.) bis heute (mit den „Lehrstückstationen“, die noch folgen werden) wird gezeigt und in der Runde diskutiert was „**Meinen und Wissen**“ in unserer heutigen Gesellschaft für eine Bedeutung hat.

1800	490	300	1588	1654
Babylonier	Zenon	Euklid	Jost Bürgi	Blaise Pascal
$\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$	Folgen/Reihen	Beweisen	Logarithmen	W‘keit

Weiterer Ablauf in Rahmen des Lehrplanes:

Falls bekannt: Direkter Beweis versus indirekter Beweis:

a. Indirekter Beweis: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

b. Später im Lehrstück Babylon und die Wurzel(2): $\sqrt{2} \neq p/q$ ist irrational.
verschiedene Übungen zum indirekten Beweis.

c Wurzelgesetze und Quadratische Gleichungen