Wir erarbeiten uns in den kommenden Lektionen die Fertigkeiten mit Quadratwurzeln zu rechnen. Folgende Themen werden bearbeitet:

1 Die Quadratwurzel und ihre Eigenschaften

2 Die Quadratwurzelfunktion hat als Schaubild einen „Ast“

3 Eine Wurzelgleichung löst man mit „IQK“

Nutze die angegebenen Materialien und Hilfsmittel.
Im Unterricht werden wir wichtige Schritte gemeinsam wiederholen und Fragen klären.

---

1 Quadratwurzeln

Quadratwurzel ziehen ist die Umkehroperation zu Quadrieren. Die Quadratwurzel von 9 ist 3, denn $3^2 = 9$ $\sqrt[2]{9} = 3$ in Kurzschreibweise: $\sqrt{9} = 3$ (Man lässt die 2 über der Wurzel meist weg)

Bei der dritten Wurzel sieht dies so aus: $\sqrt[3]{8} = 2$ (Hier kann man die 3 nicht weglassen)
Eine 4te Wurzel wäre z.B.: $\sqrt[4]{16} = 2$, denn $2^4 = 16$

Wir bearbeiten in diesem Dossier zunächst nur die Quadratwurzeln, d.h. die 2ten Wurzeln.

Übungsmaterial auch auf ommp.info

Beantworte dann diese Fragen mit Deinen Worten : (nicht in Formeln)

1.1 Die Produktregel für Wurzeln lautet:

1.2 Die Quotientenregel für Wurzeln lautet:

1.3 Teilweise Wurzelziehen bedeutet, dass …

1.4 Definitionsbereich von Wurzeln

Den Term unter der Wurzel nennt man auch „Radikant“.
Eine Wurzel ist in der bisher bekannten Zahlenmenge (die Menge R der reellen Zahlen) nur für positive Radikanten definiert.

Bsp 1: $\sqrt{6}$ ist definiert aber $\sqrt{-6}$ ist in R nicht definiert. Warum?

Falls eine Variable unter der Wurzel steht, muss man untersuchen, wann der gesamte Term unter der Wurzel (also der Radikant) positiv ist. Denn nur dann ist die Wurzel definiert.

Bsp 2: $\sqrt{-6+x}$ ist nur definiert, falls $-6+x \geq 0$ ist, d.h. falls $x \geq 6$ ist.

Bsp 3: $\sqrt{5+3\cdot(x-4)-\frac{2x}{3}}$ ist nur definiert, falls $5+3\cdot(x-4)-\frac{2x}{3} \geq 0$ ist, d.h. falls $x \geq 3$ ist.

1.5 Nenner rational machen

Wenn in einem Bruch im Nenner eine Wurzel steht, so versucht man den Bruch so zu erweitern, dass keine Wurzel mehr im Nenner steht. Der Nenner ist dann sogenannt rational.

Bsp 1 : $\frac{4}{\sqrt{-6+x}} = \frac{4\cdot\sqrt{-6+x}}{\sqrt{-6+x}\cdot\sqrt{-6+x}} = \frac{4\cdot\sqrt{-6+x}}{-6+x}$

Bsp 2: $\frac{8}{\sqrt{2x}-5} = \frac{8\cdot\left(\sqrt{2x}+5\right)}{\left(\sqrt{2x}-5\right)\cdot\left(\sqrt{2x}+5\right)} = \frac{8\cdot\left(\sqrt{2x}+5\right)}{2x-25}$

Im Beispiel 2 wurde mit Hilfe der dritten binomische Formel erweitert, so dass die Wurzel im Nenner wegfällt.

2 Die Quadratwurzelfunktion

Die einfachste Wurzelfunktion ist $y=\sqrt{x}$ oder auch $f(x)=\sqrt{x}$. Die Variable x ist die unabhängige Variable, y ist die abhängige Variable. Wie bei der linearen Funktion können wir auch die Wurzelfunktionen mit Hilfe einer Wertetabelle in ein Koordinatensystem zeichnen.

Auftrag: Benutze Geogebra und lasse dir folgende Funktionen zeichnen: (Du kannst auch ohne Geogebra die Funktionen auf ein Blatt Papier zeichnen. Erstelle dann eine Wertetabelle)

2.1 $y=\sqrt{x}$

2.2 $y=\sqrt{x-9}$

2.3 $y=\sqrt{x+9}$

2.4 $y=\sqrt{x}+2$

2.5 $y=\sqrt{x}-2$

2.6 $y=\frac{1}{10}\sqrt{x}+2$

2.7 $y=10\cdot\sqrt{x}+2$

2.8 $y=3\sqrt{x-7}+4$

2.9 $y=-2\sqrt{x+5}+4$

2.10 $y=-2\sqrt{-x+5}+3$

Fragen:

2a) Vergleiche die Schaubilder 2.1 – 2.3 Was ist festzustellen? $\leftarrow \rightarrow$

2b) Vergleiche 2.4 – 2.5 $\uparrow\downarrow$

2c) Vergleiche 2.6. – 2.7 Streckung in y-Achsenrichtung

2d) Bestimme den Anfangspunkt A(x/y) von 2.8 – 2.10

2e) Bestimme den Definitionsbereich und den Wertebereich von 2.8 – 2.10

2f) Experimentiere in Geogebra (z.B. mit Schiebereglern)
mit der Funktionsgleichung $y=a\sqrt{x+d}+e$
Formuliere Deine Erkenntnisse:
Wenn a verändert wird, dann passiert ……. , etc.

Die allgemeine Quadratwurzelfunktion $f(x) = a\sqrt{x+d} + e$

Veränderung des Parameters a:

Veränderung des Parameters d:

Veränderung des Parameters e:

Wurzelfunktionen erstellen:

Vom Schaubild einer Wurzelfunktion ist der Startpunkt A und ein zusätzlicher Punkt P gegeben.

Berechne jeweils die Funktionsgleichung der Wurzelfunktion $f(x) = a\sqrt{x+d} + e$, indem du die Verschiebungen ←→ ↑↓ und die Streckungen ausgehend von der Standardwurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ beachtest. Skizziere das Schaubild jeweils zuerst grob.

Gib jeweils den Definitionsbereich D und den Wertebereich W an.

Der Definitionsbereich ist der Bereich, den die x-Werte annehmen können.
Der Wertebereich ist der Bereich, den die y-Werte annehmen.

Aufgaben: **Tipp: eine grobe Skizze hilft**

W1 geg: A (-2 / -2,5) P (2 / 0)

W2 geg: A (3 / -4) B (0 / -1,4) Tipp: Beachte die Richtung vom Wurzel-Ast

W3 geg: A (-2 / -2,5) Nullstelle N bei x= -6

W4 geg: A (-2 / 2,5) P (14 / -2,5)

W5 geg: A (-3 / 1,5) B (1 / 5,5)

Lösungen:

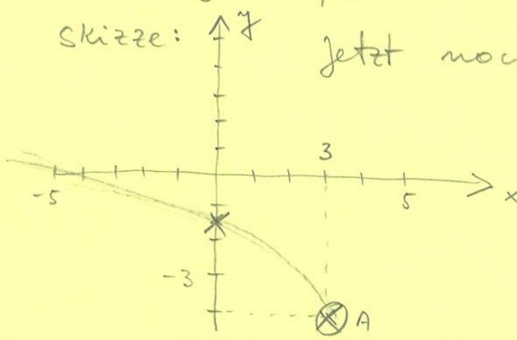
Wurzelfunktionen erstellen:

W2 geg: Startpunkt $A(3|-4)$
Punkt $B(0|-1{,}4)$

ges: Stelle die Funktionsgleichung einer Wurzelfunktion auf $f(x) = a \cdot \sqrt{x-e} + f$

Lösung: $f(x) = a \cdot \sqrt{-x+3} - 4$

Skizze:



Jetzt noch a bestimmen:

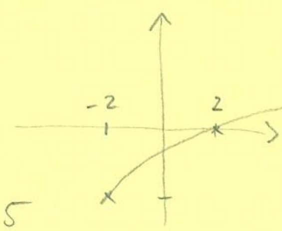
$$-1{,}4 = a \cdot \sqrt{3} - 4 \quad \Big| +4 \quad \Big| : \sqrt{3}$$

$$\frac{2{,}6}{\sqrt{3}} = a$$

$$1{,}5 \approx a$$

W1 geg: $A(-2|-2{,}5)$ $D(2|0)$

ges: Wurzelfunktion



Lösung: $f(x) = a \cdot \sqrt{x-(-2)} - 2{,}5$

a bestimmen: $0 = a \cdot \sqrt{4} - 2{,}5 \quad \Big| +2{,}5$

$$2{,}5 = a \cdot 2 \quad \Big| : 2$$

$$\frac{5}{4} = 1{,}25 = a$$

$\mathbb{D} = \{x \geq -2\}$

$f(x) = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{x+2} - 2{,}5$

$\mathbb{W} = \{y \geq -2{,}5\}$

Lösungen:

W3 geg: $A(-2/-2{,}5)$ $D(-6/0)$

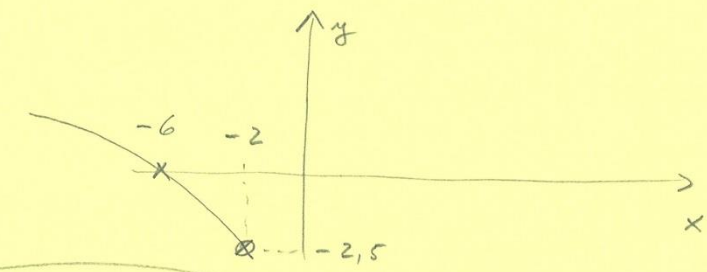
ges: $f(x) = a \cdot \sqrt{x - e} + f$

Lösung: $f(x) = 1{,}25 \cdot \sqrt{-(x+2)} - 2{,}5$

$f(x) = 1{,}25 \cdot \sqrt{-x-2} - 2{,}5$

$\mathbb{D} = \{x \leq -2\}$

$\mathbb{W} = \{y \geq -2{,}5\}$



W4 geg: $A(-2/2{,}5)$ $C(14/-2{,}5)$

ges: a) Funktionsgleichung der Wurzelfunktion

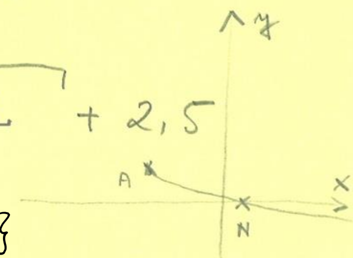
b) Berechne die Nullstelle

Lösung: a) $f(x) = -1{,}25 \cdot \sqrt{x+2} + 2{,}5$

b) $N(2/0)$

$D = \{x \geq -2\}$

$W = \{y \leq 2{,}5\}$



W5 geg: $A(-3/1{,}5)$ $B(1/5{,}5)$

ges: a) $f(x)$ b) Schnittpunkte mit $y = \frac{1}{2}x + 3$

Lösung: a) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} + 1{,}5$

$D = \{x \geq -3\}$

$W = \{y \geq 1{,}5\}$

b) $S_1(-3/1{,}5)$ $S_2(13/9{,}5)$

3 Wurzelgleichungen

Eine Gleichung bei der eine oder mehrere Wurzeln vorkommen, heisst Wurzelgleichung.

Eine Wurzelgleichung entsteht zum Beispiel beim Lösen von Textaufgaben oder z.B. wenn man die Schnittpunkte zwischen einer Wurzelfunktion und einer Linearen Funktion berechnen will.

Studiere hierzu das folgende **Beispiel 1:**

$$3 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot x} - 6 = 0 \quad \Big| \text{ Wurzelausdruck zuerst } \underline{\text{isolieren}} \text{ mit } | +6$$

$$3 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot x} = 6 \quad \Big| \; \underline{\text{Quadrieren}} \quad |\,(\;)^2$$

$$9 \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot x\right) = 36 \quad \Big| : 9 \cdot 2$$

$$x = 8 \quad \Big| \; \underline{\text{Lösung}} \; \underline{\text{kontrollieren}}$$

d.h. in die Ausgangs-gleichung einsetzen:

$$3 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot 8} - 6 \overset{?}{=} 0$$

$$3 \cdot \sqrt{4} - 6 \overset{?}{=} 0$$

$$3 \cdot 2 - 6 \overset{?}{=} 0 \quad \checkmark \text{ stimmt}$$

Somit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{ 8 \}$$

Die Lösungsstrategie bei Wurzelgleichungen ist also IQK :

1) Isolieren Eine Wurzel alleine auf einer Seite bringen. Ein Faktor darf dabei sein.
2) Quadrieren Gesamte Seite quadrieren
3) Kontrollieren Alle Lösungen in die Ausgangsgleichung einsetzen.

Beispiel 2:

Beim Schnitt von einer Wurzelfunktion und einer Linearen Funktion ergibt sich eine Wurzelgleichung.

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+1} + 2$ $\qquad y = \frac{1}{2}x + 1$

Gesucht: Berechne Schnittpunkte der Wurzelfunktion mit der Linearen Funktion.

Lösung:
Lösungen der Wurzelgleichung. Nach Isolieren und Quadrieren muss man die Gleichung in die Form „Produkt = 0“ bringen, d.h. man muss Faktorisieren. Danach ergeben sich die x-Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$ aber nur $x_2=8$ besteht die Probe in der Ausgangsgleichung. Mit x=8 ergibt sich der Schnittpunkt S(8/5)

Skizziere beide Funktionen in ein Koordinatensystem. Färbe die x Koordinate des Schnittpunktes rot, die y-Koordinate des Schnittpunktes grün..

Aufgabe W6:

Gegeben sind zwei Wurzelfunktionen: : $f(x) = \sqrt{x-3}$ und $h(x) = \sqrt{x-4} + 1$

a) Berechne die Schnittpunkte der beiden Schaubilder

b) Berechne jeweils die Nullstellen der beiden Schaubilder

c) Skizziere die Situation

Lösungen:

Schnittpunkt S(4/1) Nullstellen: $N_f(3/0)$ N_h keine

Lernaufgabe:

W7 Erstelle mit Geogebra verschiedene Schnittprobleme und schaue dir an, was mit den Schnittpunkten passiert, wenn du die einzelnen Funktionen (mit Schiebereglern) verschiebst. Wann gibt es wie viele Schnittpunkte?

a) Gerade geschnitten mit Gerade → ….

Es kann nicht zwei Schnittpunkte geben, da . . .

Es gibt einen Schnittpunkt, falls . . .

Es gibt keinen Schnittpunkt, falls . . .

b) Gerade geschnitten mit Wurzelfunktion →

Es gibt . . .

. . .

. . .

c) Wurzelfunktion geschnitten mit Wurzelfunktion →

Es gibt . . .

. . .

. . .

Weiter Übungen im Schulbuch: Mathematik für Mittelschulen (Frommenwiler / Studer)

Quadratwurzeln Definitionsbereich: Ab S. 44		Nr. 124, 125, 126, 127a,b, 128 a - e,
Faktor unter Wurzel bringen / Teilweise Wurzelziehen:		Nr. 130, 131a,b,c, 133,
Nenner rational machen:		Nr. 135, 136 a – f,
Normalform von Wurzelausdrücken:		Nr. 137 a – c

Wurzelgleichungen: Ab S. 111		Beispiele studieren und nachrechnen
		Nr. 340, 343, 345 a) d), 346, ff
Produkt = Null Gleichungen:		Nr. 351, 352

Quadratwurzelfunktion: Ab S. 213 Nr. 803e, k, n, 808 a

Viel Erfolg beim Üben und viel Freude beim Verstehen ☺

wünscht Peter Kohl