Was ist ein Bruch?

Ein Bruch ist das Resultat einer Division, d.h. ein Quotient.

$$\frac{a}{b} = a : b$$

Die Zahl a heisst Zähler bzw. Dividend, die Zahl b Nenner bzw. Divisor.

Auch ganze Zahlen können als Bruch dargestellt werden, indem man sie als Bruch mit Nenner 1 schreibt.

$$a = \frac{a}{1}$$

Ist der Zähler eines Bruches grösser als der Nenner, gäbe es auch die Möglichkeit, diesen Bruch als gemischte Zahl ("ganze Zahl plus Bruch") zu schreiben, beispielsweise $\frac{30}{13} = 2\frac{4}{13}$.

Wir benutzen diese gemischte Schreibweise allerdings nicht, da sie zu Missverständnissen führen kann!

Bruch erweitern

Man erweitert einen Bruch, indem man den gesamten Zähler und den gesamten Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Wenn mehrere Summanden im Zähler stehen, so muss man den Zähler einklammern. Der so erweiterte Bruch ist ein neuer Bruch, der den gleichen Wert besitzt wie der ursprüngliche Bruch.

Beispiele:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{2+8}{5-9} = \frac{(2+8) \cdot 3}{(5-9) \cdot 3}$$ den gesamten Zähler bzw. Nenner einklammern

$$\frac{9}{7} = \frac{9 \cdot (-10)}{7 \cdot (-10)} = \frac{-90}{-70}$$

$$12 = \frac{12}{1} = \frac{12 \cdot 3}{1 \cdot 3} = \frac{36}{3}$$

In der Regel schreibt man die Erweiterungsfaktoren (rot in den Beispielen) nicht auf.

Beispiel:

$$\frac{4}{11} = \frac{8}{22} = \frac{12}{33} = \frac{16}{44} = \frac{20}{55}$$

Bruch kürzen

Man kürzt einen Bruch, indem man <u>Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert</u>. Das Resultat ist ein neuer Bruch, der den gleichen Wert besitzt wie der ursprüngliche.

Beispiele:

$$\frac{24}{32}=\frac{24:8}{32:8}=\underline{\underline{\frac{3}{4}}} \qquad \frac{100}{45}=\frac{100:5}{45:5}=\underline{\underline{\frac{20}{9}}} \qquad \frac{132}{11}=\frac{132:11}{11:11}=\frac{12}{1}=\underline{\underline{12}}$$

Bemerkung: In der Regel schreibt man die Kürzungsfaktoren nicht auf, d.h. man lässt die Zwischenschritte mit den Divisionen weg. Beispiel:

$$\frac{3312}{1512}=\frac{1104}{504}=\frac{276}{126}=\underline{\underline{\frac{46}{21}}}$$

Im ersten Schritt wurde mit 3 gekürzt, im zweiten mit 4 und zuletzt mit 6. Selbstverständlich wäre auch eine andere Reihenfolge bzw. Kürzungsfaktoren denkbar.

Bei grösseren Zahlen empfiehlt es sich, schrittweise vorzugehen. Dabei ist es hilfreich, die wichtigsten Teilbarkeitsregeln zu beherrschen. Eine ganze Zahl ist

- durch 2 teilbar, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.
- durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
- durch 4 teilbar, wenn die Zahl, die aus den letzten beiden Ziffern besteht, durch 4 teilbar ist.
- durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 ist.
- durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
- durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
- durch 10 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 ist.

Primfaktorzerlegung:

Bei grösseren Zahlen und bei der Hauptnennerbildung beim Addieren von Brüchen (später Termen) ist eine Primfaktorzerlegung sinnvoll. Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... }

Zum Faktorisieren zerlegen wir eine Zahl Schrittweise in ihre Primfaktoren.

Bsp:

$$120 = 2\cdot 60 = 2\cdot 2\cdot 30 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 15 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$$
$$120 = 2^3\cdot 3^1\cdot 5^1$$

Und schreiben sie dann in Potenzschreibweise. Wenn Zähler und Nenner eins Bruches so faktorisiert wurde, können wir aus diesen Produkten kürzen.

Beispiel:

$$\frac{2880}{4920}=\frac{2^6\cdot 3^2\cdot 5^1}{2^3\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 41^1}=\frac{2^3\cdot 3^1}{41^1}=\frac{24}{41}$$

Kürzen bei Produkten im Zähler und/oder Nenner

Steht im Zähler und/oder im Nenner ein **Produkt**, dann versucht man zuerst, zu kürzen, bevor man die Produkte ausrechnet. Beachte, dass man aus Summen nicht kürzen darf.

Beispiele:

$$\frac{28 \cdot 85}{21} = \frac{28 : 7 \cdot 85}{21 : 7} = \frac{4 \cdot 85}{3} = \underline{\underline{\frac{340}{3}}}$$

$$\frac{125 \cdot 81}{63 \cdot 175} = \frac{125 : 25 \cdot 81 : 9}{63 : 9 \cdot 175 : 25} = \frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{45}{49}}}$$

In solchen Fällen ist es auch üblich, die einzelnen Kürzungen mittels feinen Schrägstrichen kenntlich zu machen, statt die Divisionen auszuschreiben:

$$\frac{\overset{6}{\cancel{42}} \cdot \overset{9}{\cancel{99}}}{\underset{5}{\cancel{55}} \cdot \underset{13}{\cancel{91}}} = \underline{\underline{\frac{54}{65}}}$$

Kürzen bei Summen bzw. Differenzen im Zähler und/oder Nenner

Steht im Zähler und/oder im Nenner eine Summe bzw. eine Differenz, dann kann nicht direkt gekürzt werden. Zuerst müssen die Summen bzw. die Differenzen ausgerechnet werden, bevor man probieren kann, zu kürzen.

Beispiele:

Falsch: $\frac{\overset{2}{\cancel{4}} + 12}{\underset{7}{\cancel{14}}} = \frac{2 + 12}{7} = \frac{14}{7} = 2$

Richtig: $\frac{4 + 12}{14} = \frac{16}{14} = \underline{\underline{\frac{8}{7}}}$

Falsch: $\frac{13 + \overset{1}{\cancel{4}}}{19 - \underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

Richtig: $\frac{13 + 4}{19 - 4} = \underline{\underline{\frac{17}{15}}}$

Merke: "Summen kürzen nur die Dummen!" Erkenne eine Summe am + oder - Zeichen

*Studiere das Erklärvideo auf **ommp.info** → Erklärvideos → **Bruch 1b** Fehlerbilder.mp4 (beim Kürzen)*

Brüche addieren und subtrahieren

Man addiert oder subtrahiert Brüche mit dem gleichen Nenner, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den Nenner beibehält. Sollten die Brüche nicht den gleichen Nenner haben, müssen sie zuerst durch Erweitern gleichnennerig gemacht werden. Das Resultat wird immer vollständig gekürzt angegeben.

Beispiele:

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4+3}{5}=\underline{\underline{\frac{7}{5}}}$$

$$2-\frac{3}{17}=\frac{34}{17}-\frac{3}{17}=\underline{\underline{\frac{31}{17}}}$$

$$\frac{5}{12}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{5}{12}+\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{6}{12}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Tipp: Bevor man die Brüche gleichnennerig macht, sollte man überprüfen, ob einer (oder mehrere) der auftretenden Brüche gekürzt werden kann.

Beispiele:

$$\frac{3}{8}+\frac{65}{52}=\frac{3}{8}+\frac{5}{4}=\frac{3}{8}+\frac{10}{8}=\underline{\underline{\frac{13}{8}}}$$

$$\frac{28}{20}-\frac{77}{105}-\frac{22}{11}=\frac{7}{5}-\frac{11}{15}-2=\frac{21}{15}-\frac{11}{15}-\frac{30}{15}=\frac{-20}{15}=\underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$$

Als gemeinsamen Nenner kann man immer das Produkt aller auftretenden Nenner verwenden.

Beispiele:

$$\frac{9}{8}-\frac{7}{13}=\frac{117}{104}-\frac{56}{104}=\underline{\underline{\frac{61}{104}}} \qquad 8\cdot 13=104$$

$$\frac{8}{9}-\frac{5}{12}-\frac{1}{8}=\frac{768}{864}-\frac{360}{864}-\frac{108}{864}=\frac{300}{864}=\frac{75}{216}=\underline{\underline{\frac{25}{72}}} \qquad 9\cdot 12\cdot 8=864$$

Im ersten der beiden obigen Beispiele ist 104 das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von 8 und 13, d.h. der oben dargestellte Lösungsweg ist der einfachst mögliche. Im zweiten Beispiel hingegen trifft dies nicht zu. Das kgV von 9, 12 und 8 ist 72. Verwendet man diese Zahl als gemeinsamen Nenner, vereinfacht sich die Rechnung erheblich:

$$\frac{8}{9}-\frac{5}{12}-\frac{1}{8}=\frac{64}{72}-\frac{30}{72}-\frac{9}{72}=\underline{\underline{\frac{25}{72}}}$$

Wenn möglich wird man also immer das kgV aller Nenner verwenden. Gegebenenfalls müssen die einzelnen Nenner zuerst in Faktoren zerlegt werden, um das kgV zu bestimmen. Dies geschieht mit der Primfaktorzerlegung.

Beispiel:

$$\frac{5}{18}+\frac{1}{24}+\frac{7}{30}-\frac{8}{45}=\frac{5}{2\cdot 3\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}+\frac{7}{2\cdot 3\cdot 5}-\frac{8}{3\cdot 3\cdot 5}$$

Das kgV muss demnach dreimal den Faktor 2, zweimal den Faktor 3 und einmal den Faktor 5 enthalten. Wir schreiben die Rechnung direkt auf einen gemeinsamen Bruchstrich, multiplizieren den Nenner aber vorerst nicht aus, damit wir danach leichter kürzen können, falls dies möglich ist:

$$=\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot 5+1\cdot 3\cdot 5+7\cdot 2\cdot 2\cdot 3-8\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}=\frac{100+15+84-64}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}$$

$$=\frac{135}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}=\frac{27}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=\frac{3}{2\cdot 2\cdot 2}=\underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

Brüche multiplizieren

Man multipliziert Brüche, indem man ihre Zähler miteinander multipliziert und ihre Nenner miteinander multipliziert. Bevor man die Produkte im Zähler und im Nenner ausrechnet, versucht man, zu kürzen.

Beispiele:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\underline{\underline{\frac{8}{15}}}$$

$$4\cdot\frac{3}{7}=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{7}=\underline{\underline{\frac{12}{7}}}$$

$$\frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{2}{\cancel{10}}}\cdot\frac{\overset{17}{\cancel{85}}}{\underset{13}{\cancel{91}}}=\underline{\underline{\frac{51}{26}}}$$

$$\frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{9}{\cancel{27}}}\cdot\frac{\overset{11}{\cancel{33}}}{\underset{7}{\cancel{49}}}\cdot\frac{\overset{9}{\cancel{63}}}{\underset{22}{\cancel{88}}}=\frac{5\cdot\cancel{11}\cdot\cancel{9}}{\cancel{9}\cdot 7\cdot\underset{2}{\cancel{22}}}=\underline{\underline{\frac{5}{14}}}$$

Brüche dividieren (Doppelbrüche)

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert. Dabei spielt es keine Rolle, ob man die Division mit dem Divisionszeichen (Doppelpunkt) oder als Doppelbruch schreibt. Beides bedeutet dasselbe. Merke: Man darf erst aus einem Produkt kürzen, d.h. **wir verwandeln eine Division zuerst in eine Multiplikation. Merke : Geteilt durch einen Bruch ist wie mal dessen Kehrwert.**

Beispiele:

$$\frac{\frac{6}{11}}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{11} : \frac{5}{2} = \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{12}{55}}}$$

$$\frac{\frac{46}{81}}{\frac{40}{27}} = \frac{46}{81} : \frac{40}{27} = \frac{\overset{23}{\cancel{46}}}{\underset{3}{\cancel{81}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{27}}}{\underset{20}{\cancel{40}}} = \underline{\underline{\frac{23}{60}}}$$

$$\frac{\frac{24}{25}}{7} = \frac{24}{25} : \frac{7}{1} = \frac{24}{25} \cdot \frac{1}{7} = \underline{\underline{\frac{24}{175}}}$$

$$\frac{56}{\frac{8}{13}} = \frac{56}{1} : \frac{8}{13} = \frac{\overset{7}{\cancel{56}}}{1} \cdot \frac{13}{\underset{1}{\cancel{8}}} = \frac{91}{1} = \underline{\underline{91}}$$

Aus Platzgründen schreibt man gelegentlich die Teilbrüche bei Doppelbrüchen auch im Diagonalformat.

Beispiel:

$$\frac{{}^{19}/_{7}}{{}^{23}/_{5}} = \frac{19}{7} : \frac{23}{5} = \frac{19}{7} \cdot \frac{5}{23} = \underline{\underline{\frac{95}{161}}}$$

Rechnungen mit gemischten Operationen

Beispiel 1:

$$\frac{17}{20}+\frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\underset{5}{\cancel{25}}}\cdot\frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{6}{\cancel{12}}}=\frac{17}{20}+\frac{77}{30}=\frac{51+154}{60}=\frac{205}{60}=\underline{\underline{\frac{41}{12}}}$$

Beispiel 2:

$$\frac{25}{28}\cdot\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{12}\right)=\frac{25}{28}\cdot\frac{9-2}{24}=\frac{25}{\underset{4}{\cancel{28}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{24}=\underline{\underline{\frac{25}{96}}}$$

Beispiel 3:

$$\frac{\frac{11}{6}}{1+\frac{2}{9}}=\frac{11}{6}:\left(1+\frac{2}{9}\right)=\frac{11}{6}:\frac{9+2}{9}=\frac{11}{6}:\frac{11}{9}=\frac{11}{6}\cdot\frac{9}{11}=\frac{9}{6}=\underline{\frac{3}{2}}$$

Beispiel 4:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{\frac{16}{26}-11}{9}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\frac{8}{13}-11}{9}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5}\cdot\frac{1}{\underset{3}{\cancel{9}}}\cdot\left(\frac{8}{13}-11\right)=\frac{1}{15}\cdot\frac{8-143}{13}=\frac{1}{\underset{1}{\cancel{15}}}\cdot\frac{\overset{-9}{\cancel{-135}}}{13}=\underline{\underline{-\frac{9}{13}}}$$

Beispiel 5:

$$\frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{3}{2}-1}-\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}+1\right):\left(\frac{3}{2}-1\right)-\frac{1}{3}=\frac{2+3}{3}:\frac{3-2}{2}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{5}{3}:\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{1}-\frac{1}{3}=\frac{10}{3}-\frac{1}{3}=\frac{9}{3}=\underline{\underline{3}}$$