Leicht

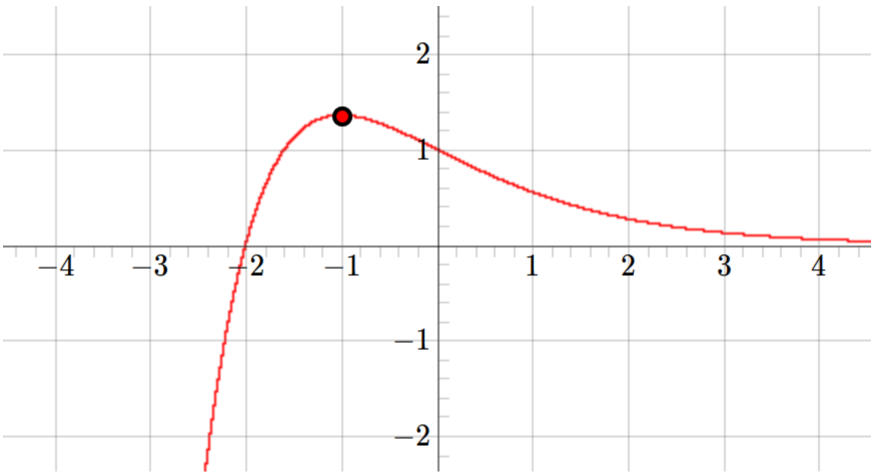
1. Bestimme in der Funktion $y = x^4 - 7x^2 + ax$ das a so, dass ihr Graph für $x = 2$ die Steigung $m = 3$ hat
2. Für welchen Wert von t hat die Funktion $f(x) = t \cdot e^{tx} - 8$ an der Stelle $x = 0$ die Steigung 1.
3. Für welchen Wert von k hat die Funktion $y = 0.25x^3 + kx^2 + 2$ bei $x = 3$ einen Wendepunkt?

Mittel

4. Die Funktion $f(x) = a \cdot e^{-kx}$ soll durch die Punkte P(2/4) und Q(5/200) gehen. Bestimme a und k.
5. Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Die Tangente im Punkt P(-2/1) verläuft parallel zur Geraden $y = 2x - 2$. Finde eine Funktionsgleichung der gesuchten Funktion.
6. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{px}{x-2}$ hat bei $x = 4$ die Steigung $m = 5$. Bestimme den Wert von p.

Schwierig

7. Gegeben ist $f(x) = (ax + b) \cdot e^{cx}$. Bestimme a, b und c anhand des folgenden Schaubildes (lokale Extremstelle bei $x = -1$).



8. Ein radioaktiver Zerfallsvorgang von 100 Gramm eines Isotops wird beschrieben durch die Funktion $B(t) = a \cdot e^{-bt}$, t in Jahren seit Beobachtungsbeginn, $B(t)$ in Gramm. Die Halbwertszeit des Isotops beträgt 10 Jahre. Bestimme a und b.

Hinweise:

1. Es gilt: $f'(2) = 3$
2. Beachte Kettenregel: $f'(x) = t^2 \cdot e^{tx}$
3. Bei Wendepunkten gilt: $f''(x) = 0$
4. Löse ein Gleichung nach a auf und setze in die andere ein (zum Beispiel: $4 = a \cdot e^{-2k} \quad \rightarrow \quad a = 4 \cdot e^{2k}$). Danach kannst du nach a auflösen.
5. Berührung im Ursprung heisst: $f(0) = 0 \ und \ f'(0) = 0$
6. Beachte Quotientenregel für die Ableitung: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
7. Es gilt: $f(-2) = 0, f(0) = 1, f'(-1) = 0$
8. Es gilt: $f(0) = 100, f(10) = 50$

Lösungen

1. $a = -1$
2. $t = \pm 1$
3. $k = -2.25$
4. $a = 0.3, k = -1.3$
5. $a = 0.75, b = 1.75, c = 0, d = 0$
6. $p = -10$
7. $a = 0.5, b = 1, c = -1$
8. $a = 100, b = 0.069$

Bestimmen Sie in der gegebenen Funktion $f(x) = x^4 - 7x^2 + ax$ das a so, dass ihr Graph für x=2 die Steigung m=3 hat.

"Steigung" $\rightarrow$ wir benötigen die 1. Ableitung.

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + ax$$
$$f'(x) = 4x^3 - 14x + a$$

Wenn wir die beiden Zahlen einsetzen erhalten wir:

$$f(2) = 4 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2 + a = 32 - 28 + a = 3$$

$a = -1$ und $\mathbf{f(x) = x^4 - 7x^2 - x}$

Aufgabe 2

$f(x) = t \cdot e^{tx} - 8$

$f'(x) = t^2 \cdot e^{tx}$

$f'(0) = 1$: $\quad f'^{(0)} = t^2 \cdot e^{t \cdot 0} = 1 \;\rightarrow\; t^2 = 1 \;\rightarrow\; t = \pm 1$

Geg. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + kx^2 + 2$

Man bestimme k so, dass der Graph dieser Funktion bei x=3 einen Wendepunkt hat.

"Wendepunkt bei x=3" bedeutet: $f''(3) = 0$

Wir benötigen die 2. Ableitung.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + kx^2 + 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2kx$$

$$f''(x) = \frac{6}{4}x + 2k = \frac{3}{2}x + 2k$$

Mit $f''(3) = 0$ ergibt sich:

$$\frac{3}{2} \cdot 3 + 2k = 0$$

$$\frac{9}{2} + 2k = 0$$

$$2k = -\frac{9}{2}$$

$$k = -\frac{9}{4} = -2.25$$

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & 4 = a \cdot e^{-2k} \\
\mathrm{II} & 200 = a \cdot e^{-5k}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{aus I folgt:} & & \frac{4}{e^{-2k}} & = & a & |umschreiben \\
 & \Leftrightarrow & 4 \cdot e^{2k} & = & a & \\
\text{in II einsetzen:} & & 200 & = & 4 \cdot e^{2k} \cdot e^{-5k} & |Potenzgesetze \\
 & \Leftrightarrow & 50 & = & e^{-3k} & |logarithmieren \\
 & \Leftrightarrow & ln(50) & = & -3k & \\
 & \Leftrightarrow & k & \approx & -1,3 &
\end{array}
$$

Ganzrationale Funktion dritten Grades und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c. \end{aligned}$$

Gleichungen aufstellen:

- berührt die x-Achse im Ursprung $\Longrightarrow f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.
- Punkt $\mathrm{P}(-2 \mid 1) \Longrightarrow f(-2) = 1$.
- Tangente in $\mathrm{P}(-2 \mid 1)$ parallel zu $y = 2x - 2 \Longrightarrow f'(-2) = 2$.

Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} d &= 0 \\ c \quad &= 0 \\ -8a + 4b - 2c + d &= 1 \\ 12a - 4b + c \quad &= 2 \end{aligned}$$

Lösen des LGS: Als Lösung des LGS erhält man:

$$a = \frac{3}{4}, \quad b = \frac{7}{4}, \quad c = 0, \quad d = 0.$$

Funktionsterm Die gesuchte Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{7}{4}x^2.$$

Der Graph der Funktion $y = \frac{px}{x-2}$ hat bei x=4 die Steigung m=5.
Berechnen Sie den Wert von p.

„Steigung“ - das verlangt nach der 1. Ableitung!

$$f'(x) = \frac{p(x-2) - px}{(x-2)^2} = \frac{-2p}{(x-2)^2}$$

Für $x = 4$ ist die Steigung $f'(4) = 5$

also: $f'(4) = \frac{-2p}{(4-2)^2} = \frac{-p}{2} = 5$

Der gesuchte Wert ist: $\mathbf{p = -10}$

Aufgabe 7

$f(x) = (ax + b) \cdot e^{cx}$

$f'(x) = a \cdot e^{cx} + (ax + b) \cdot c \cdot e^{cx}$

$f(-2) = 0$: $(-2a + b) \cdot e^{cx} = 0 \rightarrow -2a + b = 0 \rightarrow b = 2a$

$f(0) = 1$: $(a \cdot 0 + b) \cdot e^{c \cdot 0} = 1 \rightarrow \boldsymbol{b = 1\ und\ a = 0.5}$

$f'(-1) = 0.5 \cdot e^{-c} + (0.5 \cdot -1 + 1) \cdot c \cdot e^{-c} = 0$

$f'(-1) = 0.5 \cdot e^{-c} + 0.5 \cdot c \cdot e^{-c} = 0$

Ausklammern von e^{-c}, dann gilt:

$e^{-c}(0.5 + 0.5c) = 0 \rightarrow \boldsymbol{c = -1}$

Aufgabe 8

$B(t) = a \cdot e^{-bx}$

$B(0) = 100$: $a \cdot e^{-b \cdot 0} = 100 \rightarrow \boldsymbol{a = 100}$

$B(10) = 50$: $100 \cdot e^{-b \cdot 10} = 50 \rightarrow e^{-10b} = 0.5 \rightarrow -10b = \ln(0.5) \rightarrow \boldsymbol{b = 0.069}$